Binomialkoeffizient und das Pascal´sche Dreieck

Ausgangsfrage: Aus der Mittelstufe kennen wir die binomischen Formeln: $(a + b)^2$. Wie kann man aber höhere binomische Formeln, also $(a + b)^3$, $(a + b)^4$… $(a + b)^n$ berechnen?

Es gilt hierfür folgende Formel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot a^{n-(n-1)}b^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot a^0 b^n$$

Die Formel sieht kompliziert aus, baut sich aber nach einer recht einfachen Logik auf:

Die Exponenten bei a ________________________________ und

die Exponenten bei b ________________________________.

Die Koeffizienten des Binoms (Binomialkoeffizienten) berechnen sich nach folgender Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Beispiel: $(a+b)^2 = \binom{2}{0}\cdot a^2b^0 + \binom{2}{1}\cdot a^1b^1 + \binom{2}{2}\cdot a^0b^2 = 1\cdot a^2 1 + 2\cdot a^1b^1 + 1\cdot 1b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Aufgabe: Berechne die Formel für $(a+b)^3$

Die Koeffizienten lassen sich aber auch recht einfach aus dem Pascal´schen Dreieck bestimmen.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Aufgabe: Berechne die Formel für $(a + b)^4$

Aufgabe: Lies im Pascal´schen Dreieck folgende Binomialkoeffizienten ab:

$\binom{4}{1} =$ $\binom{5}{3} =$ $\binom{\ }{\ } = 21$ $\binom{7}{4} =$

Binomialkoeffizient und das Pascal´sche Dreieck Lösung

Ausgangsfrage: Aus der Mittelstufe kennen wir die binomischen Formeln: $(a + b)^2$. Wie kann man aber höhere binomische Formeln, also $(a + b)^3$, $(a + b)^4$… $(a + b)^n$ berechnen?

Es gilt hierfür folgende Formel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n$$

Die Formel sieht kompliziert aus, baut sich aber nach einer recht einfachen Logik auf:

Die Exponenten bei a nehmen also von 0 bis n immer zu und
die Exponenten bei b nehmen von n bis 0 immer ab.

Die Koeffizienten des Binoms berechnen sich nach folgender Formel: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Beispiel: $(a+b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 b^2 = 1 \cdot a^2 1 + 2 \cdot a^1 b^1 + 1 \cdot 1 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Aufgabe: Berechne die Formel für $(a+b)^3$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} \cdot a^3 b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^2 b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^1 b^2 + \binom{3}{3} \cdot a^0 b^3 =$$

$$1 \cdot a^3 b^0 + 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3 =$$

$$a^3 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + b^3$$

Die Koeffizienten lassen sich auch recht einfach aus dem Pascal´schen Dreieck bestimmen.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Aufgabe: Berechne die Formel für $(a + b)^4$

$$(a+b)^4 = 1a^4 b^0 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + 1a^0 b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b \quad + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Aufgabe: Lies im Pascal´schen Dreieck folgende Binomialkoeffizienten ab:

$\binom{4}{1} = 4$ $\binom{5}{3} = 10$ $\binom{7}{2} = 21$ $\binom{7}{4} = 35$